مثال: $(\mathbb{R}, d)$ فضاء تام، ℓ_p , ℓ_∞ , S , $C[0,1]$, C ,
$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ كلها فضاءات تامة.

تمرين:

ليكن (X, d) فضاءً متريًا ولنعرّف دالة المسافة d_1 بالشكل:

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

أثبت أن (X, d_1) فضاء متري.

لدينا:

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0 \Leftarrow d(x,y) \geq 0$$

$$2)\ d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$3)\ d_1(x,y) = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_1(y,x)$$

$$4)\ \forall x, y, z \in X:\ d_1(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = \frac{1}{1+\frac{1}{d(x,z)}}$$

$$\leq \frac{1}{1+\frac{1}{d(x,y)+d(y,z)}} = \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\underset{\text{حسب تراجح}}{\leq} \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d_1(x,y) + d_1(y,z).$$

ملاحظة:

الفضاء المتري الحقيقي هو فضاء متري تام لأن جميع متتاليات كوشي فيه متقاربة من عناصره.

ملاحظة:

$(\mathbb{Q}, d)$ فضاء متري غير تام لأن مثلاً المتتالية $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ بما أنها متقاربة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ كوشي في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ كوشي في $\mathbb{Q}$ لكنها تتقارب من العدد $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرين

لتكن $C(\mathbb{R})$ مجموعة كل المتتاليات الأعداد الحقيقية المتقاربة في $\mathbb{R}$ و
لنعرف المسافة:

$d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$; $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ ⟶ أثبت أن $C(\mathbb{R})$ تام.

الحل: ولتكن المتتالية $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشي. عندئذ

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N_0(\varepsilon) ; \forall n, m \geq N_0 : d(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon$.

$\Rightarrow \sup_i |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \Rightarrow |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$ (لأنه صحيح)

وبذلك نجد أن المتتالية $\{x_i^{(n)}\}$ كوشي.
بما أن $\mathbb{R}$ تمثل فضاء متري حقيقي تام ⟸ كل كوشي فيه متقاربة ⟸

$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$; $\forall i$, $n > N_0 \Rightarrow |x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sup |x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon \Rightarrow d(x^{n}, x) < \varepsilon$.

لنثبت أن $x \in C(\mathbb{R})$.
ليكن $N = N_0$. لكن $\{x_i^{(N)}\} \in C(\mathbb{R})$ فهي متقاربة في $\mathbb{R}$ ⟸ كوشي ⟸
تحقق الشرط الآتي:

$|x_i^{(N)} - x_j^{(N)}| < \varepsilon$; $\forall i, j > N(\varepsilon)$.

$\Rightarrow |x_i - x_j| = |x_i - x_i^{(N)} + x_i^{(N)} - x_j^{(N)} + x_j^{(N)} - x_j|$

$\leq |x_i - x_i^{(N)}| + |x_i^{(N)} - x_j^{(N)}| + |x_j^{(N)} - x_j| < 3\varepsilon$.

⟸ المتتالية $\{x_i\}$ كوشي في $\mathbb{R}$ متقاربة في $\mathbb{R}$ ⟸ $x \in C(\mathbb{R})$

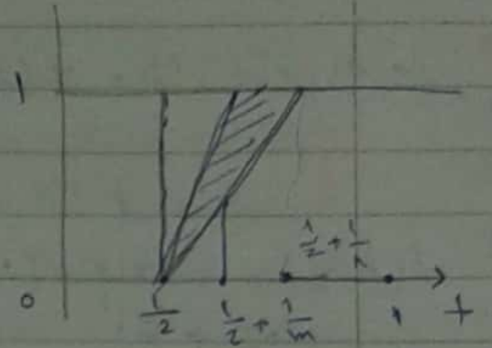
مثال:
لتأخذ فضاء الدوال المستمرة على المجال $C[0,1]$ ولنعرف على هذا الفضاء
المسافة الآتية: $\forall x, y \in C[0,1]$; $d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$

هذه دالة المسافة ولكن هذا الفضاء المتري فضاء غير تام.

الموضوع التاريخ / / ٢٠

لنأخذ المتتالية:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & ; \quad \frac{1}{2} < t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$



~~$d(x, y) < \varepsilon$~~

إن هذه المتتالية تمثل كوشي لمفهوم المسافة وذلك لأنه:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \; ; \; \forall \; n, m \ge N : d(x_n, x_m) < \varepsilon .$

$$n, m > \frac{1}{\varepsilon}$$

أي أن:

$$\frac{1}{2m} - \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

ولكن هذه المتتالية لا تتقارب في هذا الفضاء.

لأنه لو فرضنا جدلاً أن هذه المتتالية تتقارب من الدالة $x(t) \in$

$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t) \Rightarrow x(t) \in [0,1]$.

لكن بملاحظة أنه

$$d(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)| \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| \, dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)| \, dt$$

AL Aziz

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} . \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} < t \le 1 . \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة غير مستمرة عند $\frac{1}{2}$ وهذا يعني أنه $x(t) \notin C[0,1]$ وهذا ينافي الفرض.

مثال:

إن فضاء الدوال المستمرة $C[0,1]$ المزود بالمسافة d حيث

$$d(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$$

إن هذا الفضاء فضاء متري تام لأن أي متتالية $x_n(t)$ فيه متتالية كوشي تتقارب من عنصر لهذا الفضاء وذلك لأنه كل متتالية كوشي يكون:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \; ; \forall n, m \ge N \Rightarrow \max_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

تعاريف عامة:

الجوار:

$$\forall a \; ; \quad]a - r , a + r[.$$

$$|x - a| < r \Leftrightarrow -r < x - a < r \Rightarrow a - r \le x \le a + r$$

القرص الدائري المفتوح:

$$\{ z \in \mathbb{C} \; ; |z - z_0| < r \} .$$

الكرة المفتوحة:

مجموعة عناصر المحققة للشرط:

$$S(a,r) = \{ x \in X \; ; \; d(x,a) < r \} .$$

الكرة المغلقة:

$$S[a,r] = \{ x \in X \; ; \; d(x,a) \le r \} .$$

قطر مجموعة:

ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن $A, B \subseteq X$

المسافة بين النقطة x والمجموعة A: $d(x, A) = \inf\{ d(x, a) ; a \in A\}$

المسافة بين مجموعتين A, B:

$d(A, B) = \inf\{ d(a, b) ; a \in A, b \in B\}$.

$d(A) = \sup\{ d(a, a') ; a, a' \in A\}$.

قطر المجموعة A. قد يكون محدوداً أو غير محدود.

المجموعة المحدودة:

كل مجموعة نقطتها محدود تسمى مجموعة محدودة بحيث A محدودة (ع) $d(A) < \infty$

A غير محدودة (ع) $d(A) = \infty$.

مثال:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في الفضاء المتري (X, d) أثبت أن مجموعة عناصر هذه المتتالية محدودة.

ملاحظة:

ليس من الضروري كل فضاء متري محدود.

مثلاً: $d(\mathbb{R}) = \infty$ في الفضاء $(\mathbb{R}, |\ |)$ غير محدود.

بينما الفضاء $(]0, 1[, |\ |)$ محدود. لأن $d(]0,1[) = 1 < \infty$

ملاحظة:

في أي فضاء متري (X, d) محدوداً وغير محدود يمكن تشكيل فضاء متري محدود.

مثلاً:

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

هذا الفضاء المتري الناتج يكون فضاء محدود.

المجموعة المفتوحة:

ليكن (X, d) فضاء متري نسمي المجموعة $G \subseteq X$ مجموعة مفتوحة إذا و فقط إذا وجد جوار لأي نقطة من نقاطها محتوى تماماً فيها. أي:

$\forall x \in G ; \exists r > 0 ; S(x, r) \subset G$

النقطة الداخلية:

الموضوع　　　　التاريخ / / 201

يقال أنه $a \in S$ نقطة داخلية في $S \subseteq X$ إذا وجد جوار مفتوح لهذه النقطة محتوى بأكمله ضمن هذه المجموعة.

المجموعة المغلقة:

تكون المجموعة M في الفضاء المتري (X, d) إذا فقط إذا كانت متممة مفتوحة.

ملاحظة:

داخلية المجموعة S هي اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في S.

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup_{G \in S} G$$

لصاقة المجموعة S:

أصغر مجموعة مغلقة تحوي المجموعة S.

وهي مجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة S والنقطة الملاصقة هي نقطة أي جوار لها تتقاطع مع S.

$$\overline{S} = \bigcap_{S \subset F} F$$

ملاحظة:

- دوماً: $\overset{\circ}{S} \subset \overline{S}$.
- S مفتوحة $\Leftrightarrow$ $\overset{\circ}{S} = S$.
- S مغلقة $\Leftrightarrow$ $S = \overline{S}$.
- تكون المجموعة S الجزئية من الفضاء المتري (X, d) مغلقة إذا حوت جميع نقاط تراكمها وذلك حسب النقطة الآتية: $\overline{S} = S \cup S'$.

نقطة التراكم:

نقول إن x_0 نقطة تراكم للمجموعة S إذا كان أي جوار لـ x_0 يتقاطع مع S بنقاط مختلفة عن x_0.

$$\forall r > 0 \; ; \left(S(x, r) \setminus \{x\} \right) \cap S \neq \emptyset .$$

ملاحظة:

$$S \subset T \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{T} \Rightarrow \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{T} .$$

تكون النقطة x_0 لاصقة بالمجموعة X إذا تحقق:

$$\forall r > 0 \; ; \left(S(x_0, r) \cap S \right) \neq \emptyset .$$

مبرهنة:

Al Aziz

- اذا كان (X, d) فضاء متري عندئذ X , $\emptyset$ مغلقتان ومفتوحتان بآن واحد.
- اجتماع أي عدد من المفتوحة مفتوح.

تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة. أما إذا العدد غير منته ليس بالضرورة.

مثال:

لتأخذ أسرة المجالات المفتوحة $A_n =]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ مجموعات مفتوحة.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right) = \{0\}$$

↓

مجموعة مغلقة.

نتيجة:

① X , $\emptyset$ مغلقتان.

② تقاطع أي عدد من المغلقات مغلقة.

③ اجتماع عدد غير منته من المغلقات ليس بالضرورة مغلقة فقط الاجتماع المنتهي.

نتيجة:

الفضاء الجزئي المغلق من الفضاء التام هو فضاء تام.

الإثبات: لتكن $\{x_n\}$ كوشي في الفضاء F ($F \subset X$) وإذا كان $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$.

1) اذا كان $x \in F$ يتم المطلوب.

2) اذا كان $x \in X$ وإذا كانت $x \in \bar{F}$ ولكن $\bar{F} = F$ (كونها مغلقة) ⇐ $x \in F$ فهو فضاء تام.

مجموعة الكرات المتداخلة:

إن مجموعة الكرات المتداخلة في فضاء ما هي متتالية كرات المغلقة بأشكال: $\{S_n\}$ حيث: $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$

$d(S_n) \to 0$ عندما $n \to \infty$.

برهنة:

الموضوع التاريخ / / 20

لتكن (X,d) ف.م . يكون تاماً إذا فقط إذا كان تقاطع أي مجموعة من الكرات المغلقة المتداخلة غير خالي.

المجموعات الكثيفة:

نقول من $S \subset X$ أنها كثيفة في X إذا فقط إذا كان: $\bar{S} = \mathbb{R}$.

المجموعة غير الكثيفة بأي مكان:

نقول من $S \subset X$ أنها غير كثيفة بأي مكان من الفضاء المتري X إذا كان بكل كرة $K(x_0, r_0)$ توجد كرة أخرى

$\exists K(x_1, r_1) \cap S = \emptyset$.

الفضاء المنفصل:

يقال أن الفضاء (X,d) منفصل إذا احتوى مجموعة واحدة على الأقل كثيفة وقابلة للعد. مثلاً $\mathbb{Q}$.

تمرين:

لتكن $S \subset X$ حيث (X,d) فضاء متري . إن S تكون كثيفة في الفضاء المتري X إذا فقط إذا تقاطع مع كل الكرات المفتوحة في X .

ملاحظة:

$\mathbb{Z}$ مغلقة وغير كثيفة في $\mathbb{R}$.

حيث:
$$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \underset{\neq\emptyset}{\mathbb{Z}'} = \mathbb{Z}$$

ولكن غير كثيفة لأن: $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$.

الحل: ($\Leftarrow$) نفرض أن المجموعة S كثيفة في الفضاء (X,d) ولتكن $S(x,r)$ $\forall$ وبما أن x نقطة لاصقة بالمجموعة S

لأن ($X = \bar{S}$) و $S(x,r)$ كرة مفتوحة .

$\Rightarrow S(x,r) \cap S \neq \emptyset$.

ومن جهة ثانية لنثبت العكس:

($\Rightarrow$) نفرض أن x نقطة $\in X$ و S كرة مفتوحة مركزها x .

حسب الشرط:

$S(x,r) \cap S \neq \emptyset$.

التاريخ / / 20 الموضوع

$\Rightarrow x \in \bar{S} \Rightarrow X \subset \bar{S} \Rightarrow \bar{S} = X.$

تمرين:

لتكن $BV[a,b]$ مجموعة كل الدوال المحدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$

ولنعرف:

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + \int_a^b (f - g)$$

الفضاء الطوبولوجي:

لتكن $X \neq \phi$ ، T أسرة أو صنف من المجموعات الجزئية من X

$T = \{ X, \phi, \{1\}, \{2\} \}$

تسمى T طبولوجيا إذا تحقق ما يلي:

1) $X \in T, \phi \in T$

2) كل تقاطع منتهي لعناصر من T هو عنصر من T.

اتحاد أي عدد من عناصر T " " " "

فيسمى (X, T) هو فضاء طبولوجي ونسمي T طبولوجيا. العناصر المنتمية إلى T هي مجموعات مفتوحة. إذا أخذنا:

$\{X, \phi\} = T \longrightarrow$ الطبولوجيا التافهة

الفضاء القابل للتمتير

نسمي الفضاء الطبولوجي (X, d) قابل للتمتير إذا وجدت مسافة d بحيث أن $G = T$ (G هو شكل المجموعات المفتوحة من المسافة d).

ملاحظة:

يمكن تعريف أكثر من طبولوجيا على المجموعة نفسها X.

ملاحظة:

كل فضاء متري طبولوجي والعكس غير صحيح بالضرورة.

استمرار الدوال في الفضاءات المترية والطبولوجية

لتكن $f:(X, d) \to (Y, \rho)$ نقول إن للدالة f نهاية هو العدد L ونكتب

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$

إذا وفقط إذا كان:

Al Aziz

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 ; \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), L) < \varepsilon.$

وتكون الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة x_0 اذا كان:

لأجل اي متتالية $\{x_n\}$ من X حيث $\forall n$ يحقق انه:

$$d(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon.$$

الاستمرار بانتظام:

نقول ان الدالة f مستمرة بانتظام على مجموعة X اذا كان:

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \forall x, x' ; \; d(x, x') < \delta : \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon.$

مثال:

لتأخذ $f(x) = x$ مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$. لدينا:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) ; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')|$

$= |x - x'| < \delta = \varepsilon.$

مثال: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \in]0,1[$.

مستمرة على المجال $]0,1[$ لكنها غير مستمرة بانتظام. لنأخذ المتتاليتين:

$\frac{\delta}{n} , \frac{\delta}{2n}$ $\quad \varepsilon = 1 > 0$

$n > \delta.$

$\frac{\delta}{n} - \frac{\delta}{2n} = \frac{\delta}{2n} < \delta.$

وبنفس الوقت:

$f\left(\frac{\delta}{2n}\right) - f\left(\frac{\delta}{n}\right) = \frac{2n}{\delta} - \frac{n}{\delta} = \frac{n}{\delta} > 1 = \varepsilon.$

مبرهنة:

اذا كان (X, d) , (Y, ρ) فضاءين متريين ولتكن الدالة $f : X \to Y$

عندئذ تكون f مستمرة على X ⟵ اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية

لأي مفتوحة في Y هي مفتوحة في X.

تعريف الدالة ~~المستمرة~~: نصف المستمرة:

ليكن X فضاء طبولوجيا ولتكن $f : X \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية تسمى نصف

مستمرة من الأعلى على X إذا وفقط إذا كان
$f^{-1}(-\infty , t)$; $\forall t \in \mathbb{R}$.
مجموعة مفتوحة في X.
$\{ x \in X ; f(x) < t \}$ مفتوحة في X.
ونسمي نصف مستمرة من الأدنى إذا كانت الدالة f - نصف مستمرة من الأعلى.

ملاحظة:
الدالة f مستمرة على X (إذا) نصف مستمرة من الأعلى ومن الأدنى بآن واحد.

التطبيق المفتوح:
يقال أن التطبيق $f : X \to Y$ مفتوح (إذا) الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة في X مجموعة مفتوحة في Y.

الهوميومورفيزم: